Mathématiques

Table des matières

1 Dérivation

1.1 Nombre dérivé

Le nombre dérivé de f en un point a est noté $f'(a)$. Il représente la pente de la tangente à la courbe de f au point $(a, f(a))$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarques :
— Si $f'(a) > 0$, la fonction est croissante au voisinage de a.
— Si $f'(a) < 0$, la fonction est décroissante au voisinage de a.
— Si $f'(a) = 0$, la tangente est horizontale.

1.2 Formules de dérivation

Fonction $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$
$f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$

1.3 Opérations sur les dérivées

Pour deux fonctions u et v et une constante k :
— $(u+v)' = u' + v'$
— $(ku)' = ku'$
— $(uv)' = u'v + uv'$
— $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
— $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
— $\big(f(g(x))\big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

1.4 Variations de fonctions

— f est croissante sur un intervalle si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle.
— f est décroissante sur un intervalle si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de l'intervalle.
— f est constante sur un intervalle si $f'(x) = 0$ pour tout x de l'intervalle.

2 Probabilités conditionnelles

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. La **probabilité conditionnelle** de B sachant A est la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A s'est produit.

On la note $P_A(B)$ et elle est définie par :

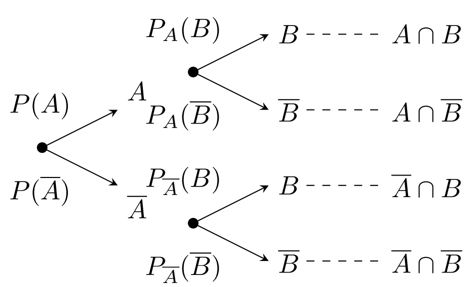
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

2.1 Propriétés

- $0 \leq P_A(B) \leq 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

2.2 Arbre pondéré

Un **arbre pondéré** est un diagramme qui permet de représenter visuellement les probabilités conditionnelles et les probabilités totales. Chaque branche est pondérée par la probabilité correspondante.



2.3 Événements indépendants

Deux événements A et B sont **indépendants** si la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de l'autre. Mathématiquement :

$$P_A(B) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

2.4 Variables aléatoires

On réalise une expérience dont le résultat est imprévisible (tirer une carte, lancer un dé, etc.).

Une variable aléatoire X associe à chaque issue de l'expérience un nombre réel.

Pour un dé, la variable aléatoire X peux prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

2.4.1 Loi de probabilité

La loi de probabilité de X donne, pour chaque valeur possible x_i, la probabilité $P(X = x_i)$.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Remarque :

$$\sum_i P(X = x_i) = 1$$

2.4.2 Espérance

L'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, est la moyenne théorique :

$$E(X) = \sum_i x_i \times P(X = x_i)$$

3 Le second degré

3.1 Fonction (trinôme) du second degré

Une fonction du second degré est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

3.1.1 Forme canonique

On peut aussi écrire la fonction sous la **forme canonique** :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où :

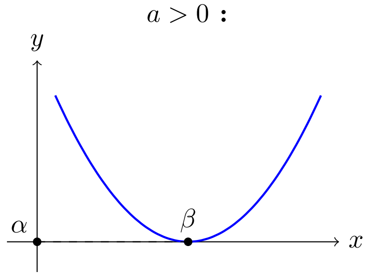
$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = f(\alpha)$$

— α est l'abscisse du sommet de la parabole.
— β est l'ordonnée du sommet.

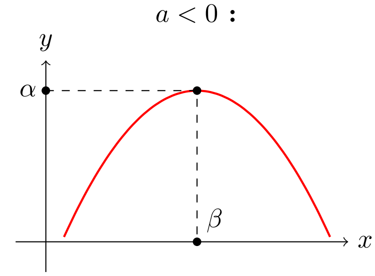
3.1.2 Représentation graphique

Toutes les fonctions du second degré sont représentées par une **parabole**. Deux cas sont possibles :

$a > 0$ **:**



$a < 0$ **:**



3.1.3 Tableau de variations

$a > 0$ **:**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$

$a < 0$ **:**

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$

3.1.4 Parité d'une fonction

Une fonction est paire si :

$$f(-x) = f(x)$$

Elle est impaire si :

$$f(-x) = -f(x)$$

3.2 Équation du second degré

3.2.1 Discriminant

On définit le **discriminant** Δ par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

— Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles et distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle mais deux solution immaginaire :

$$x_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

3.2.2 Forme factorisée d'un trinôme

On peut factoriser $ax^2 + bx + c$ en fonction des solutions :

— Si $\Delta \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

— Si $\Delta = 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

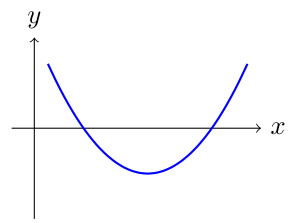
3.2.3 Signe d'un trinôme

On note s le signe de a et $-s$ le signe opposé de a.

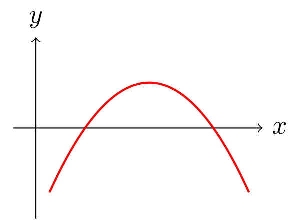
$\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		s	0	$-s$	0	s	

$a > 0$:



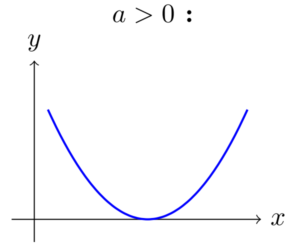
$a < 0$:



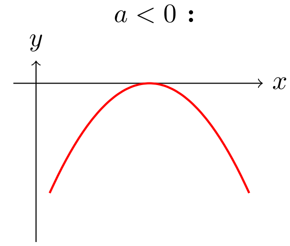
$\Delta = 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		s	0	s	

$a > 0$:



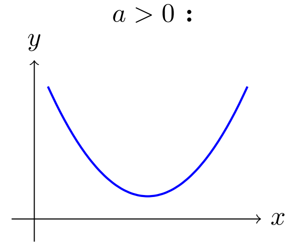
$a < 0$:



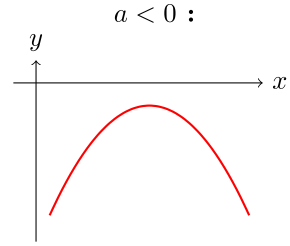
$\Delta < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		s	

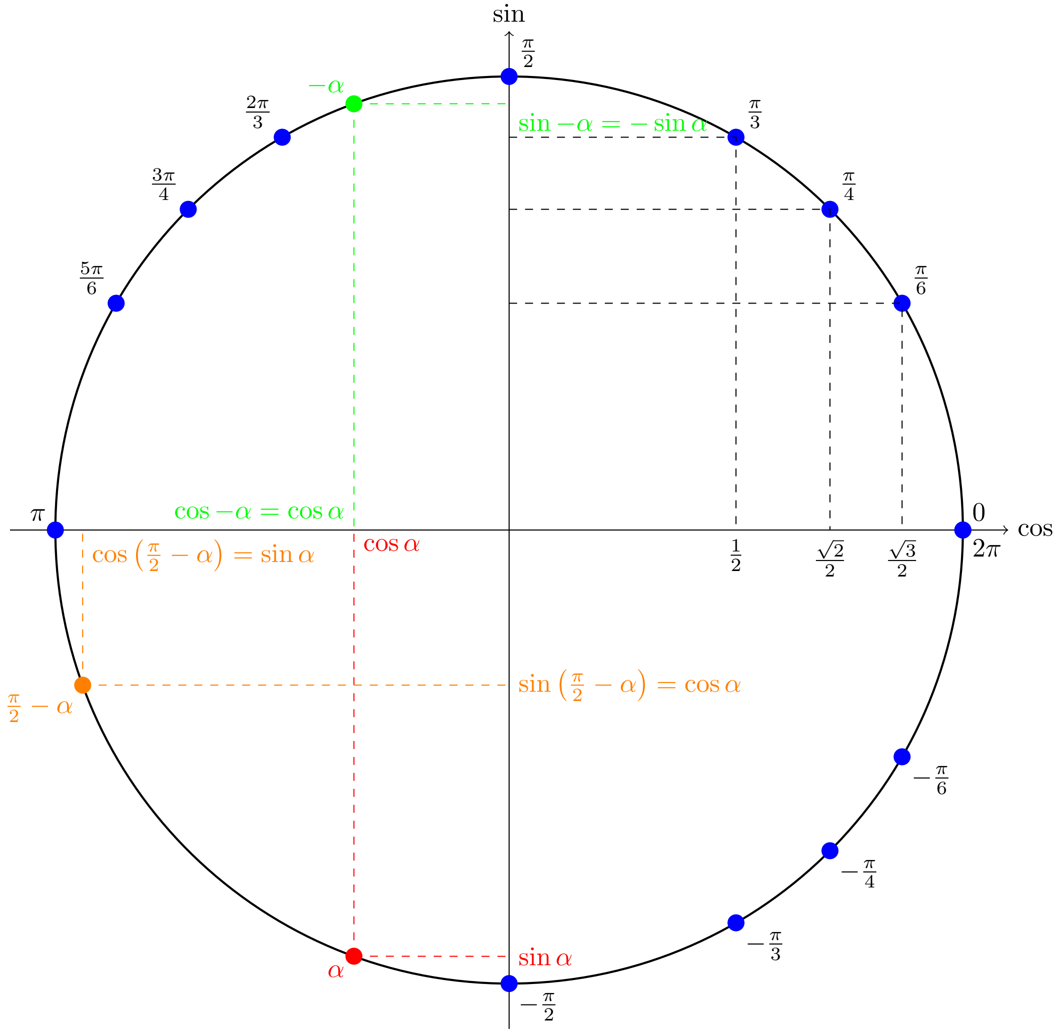
$a > 0$:



$a < 0$:



4 Tigonométrie



$\forall \theta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$: L'angle θ est une mesure de l'angle α.

5 Suites numériques

Une suite numérique, est une liste indéxée de nombres.

5.1 Suites arithmétiques

- u_0 : terme initial
- r : raison de la suite

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] \arrow[rr, bend right, "+2r"'] \arrow[rrrrrr, bend right, "+nr"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 & \cdots & u_{n-1} \arrow[r, bend left, "+r"] & u_n \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{n+1} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Formules importantes :
Formule par récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Formule explicite :

$$u_n = u_0 + nr$$

Ddifférence de termes :

$$u_n - u_p = r(n-p)$$

Somme des $n+1$ premiers termes :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

5.2 Suites géométriques

- u_0 : terme initial
- q : raison de la suite

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] \arrow[rr, bend right, "\times q^2"'] \arrow[rrrrrr, bend right, "\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 & \cdots & u_{n-1} \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_n \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{n+1} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Formules importantes :
Formule par récurrence :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Formule explicite :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Ddifférence de termes :

$$\frac{u_n}{u_p} = q^{n-p}$$

Somme des $n+1$ premiers termes :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}, q \neq 1$$

6 La fonction expodentielle

La fonction expodentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. On la note $exp(x)$ ou bien e^x. Pour tout réels x et y, $e^{x+y} = e^x \times e^y$. Pour tout réel a, la suite e^{na} est une suite géométrique de raison e^a. $e^x > 0$.