

# Mathématiques expertes

## Table des matières

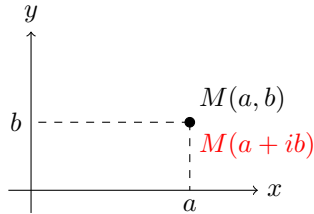
<b>1</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>2</b>
1.1	Droite réelle, plan complexe et ensemble $\mathbb{C}$	2
1.2	Forme algébrique d'un nombre complexe	2
1.3	Règles de calcul	2
1.4	Imaginaire pur	2
1.5	Relations entre 2 nombres complexes	2
1.6	Formule du binôme dans $\mathbb{C}$	3
1.6.1	Qu'est-ce qu'un coefficient binomial?	3
1.6.2	Symétrie des coefficients binomiaux	3
1.6.3	La relation de Pascal	3
1.6.4	Le triangle de Pascal	3
1.6.5	Formule du binôme de Newton	3

# 1 Nombres complexes

## 1.1 Droite réelle, plan complexe et ensemble $\mathbb{C}$

On a  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Rq :  $E = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$ , on a  $2 \in E$ ,  $\{b, c\} \subset E$



A tout point  $M(a, b)$  du plan, on va lui associer un nombre dit complexe que l'on note  $a + ib$  ou  $i$  est un nombre imaginaire qui vérifie  $i^2 = -1$

Ainsi, l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes est défini comme suit :

$$\mathbb{C} = \{a + ib, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

## 1.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

Soit  $z \in \mathbb{C}$  un nombre complexe. On peut l'écrire sous la forme algébrique suivante :

$$z = a + ib$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels. Dans cette expression,  $a$  est appelé la partie réelle de  $z$  et est noté  $\text{Re}(z)$ , tandis que  $b$  est appelé la partie imaginaire de  $z$  et est noté  $\text{Im}(z)$ .

On a donc :

$$\text{Re}(z) = a \quad \text{et} \quad \text{Im}(z) = b \quad \text{et} \quad z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$$

## 1.3 Règles de calcul

Les règles de calculs dans  $\mathbb{C}$  sont les mêmes que celles dans  $\mathbb{R}$ .

## 1.4 Imaginaire pur

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , on dit que  $z$  est pur lorsque  $\text{Re}(z) = 0$ .

Donc  $z$  est pur  $\iff \exists b \in \mathbb{R}, z = ib$ .

L'ensemble des imaginaires purs est noté  $i\mathbb{R}$ . Alors on a :

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$$

## 1.5 Relations entre 2 nombres complexes

Soit  $z$  et  $z'$  ou  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ .

$$- z = 0 \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = 0 \\ \text{Im}(z) = 0 \end{cases}$$

$$- z = z' \iff \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$$

$$- z \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(z) = 0$$

$$- z \in i\mathbb{R} \iff \text{Re}(z) = 0$$

...

## 1.6 Formule du binôme dans $\mathbb{C}$

### 1.6.1 Qu'est-ce qu'un coefficient binomial ?

Soit  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $0 \leq k \leq n$ .

Le nombre de combinaisons de  $k$  éléments parmi  $n$  est noté  $C_n^k$  ou  $\binom{n}{k}$  et s'appelle coefficient binomial.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

### 1.6.2 Symétrie des coefficients binomiaux

Soit  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $0 \leq k \leq n$ .

On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

### 1.6.3 La relation de Pascal

Soit  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $1 \leq k \leq n-1$ .

On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

### 1.6.4 Le triangle de Pascal

Construisons un tableau en plaçant les coefficients binomiaux de la manière suivante :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	...	n
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
...										
k	1	$\binom{1}{k}$	$\binom{2}{k}$	$\binom{3}{k}$	$\binom{4}{k}$	$\binom{5}{k}$	$\binom{6}{k}$	$\binom{7}{k}$	...	$\binom{n}{k}$

### 1.6.5 Formule du binôme de Newton

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$