Mathématiques

Table des matières

1 Dénombrement

1.1 Cardinal d'un ensemble fini

On appelle cardinal d'un ensemble fini E le nombre d'éléments de cet ensemble. Ce nombre est noté :

$$Card(E)$$

1.1.1 Principe additif

Formule du crible Soit A et B deux ensembles finis, on a :

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

Ensembles disjoints On dit que les ensembles A et B sont disjoints lorsque leur intersection est vide, c'est-à-dire que $A \cap B = \emptyset$.

Cela nous permet d'affirmer que :

$$Card(A \overset{d}{\cup} B) = Card(A) + Card(B)$$

1.1.2 Principe multiplicatif

k-liste, k-uplet Soit E un ensemble fini, la k-liste ou k-uplet est une liste ordonnée de k éléments de E.

Produit cartésien Soit E et F deux ensembles finis, le produit cartésien de E suivi de F, $E \times F$ est l'ensemble des couples (α, β) tels que $\alpha \in E$ et $\beta \in F$. On a alors :

$$(\alpha, \beta) \in E \times F$$

Le cardinal de $E \times F$ est donné par :

$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, Card(E^k) = Card(E)^k$$

1.2 Raisonnement par récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$, on veut montrer que la propriété suivante est vraie :

$$P(n) : Card(E^n) = Card(E)^n$$

Initialisation (vérification de $P(0)$) Pour $n = 0$, on a $E^0 = \{e\}$, avec e l'élément neutre, donc $Card(E^0) = 1 = Card(E)^0$. La propriété $P(0)$ est donc vraie.

Hérédité (vérification de $P(n+1)$ en supposant que $P(n)$ est vrai) Supposons que $P(n)$ est vrai, c'est-à-dire que $Card(E^n) = Card(E)^n$. Montrons que $P(n+1)$ est vrai.

On a :

$$E^{n+1} = E^n \times E$$

D'après le principe multiplicatif, on a :

$$Card(E^{n+1}) = Card(E^n) \times Card(E)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$Card(E^{n+1}) = Card(E)^n \times Card(E) = Card(E)^{n+1}$$

La propriété $P(n+1)$ est donc vraie lorsque $P(n)$ est vraie.

Conclusion D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ est vrai.

1.3 Nombre de parties d'un ensemble à n éléments

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de parties de E, noté $P(E)$, est donné par :

$$P(E) = 2^{Card(E)} = 2^n$$

Remarque :
- L'ensemble vide noté $\emptyset$ et qui contient 0 élément, est une partie de tous les ensembles. Ainsi, $\forall E$, $\emptyset \in P(E)$.
- L'ensemble E lui-même est une partie de E. Ainsi, $\forall E$, $E \in P(E)$.
- Considérons l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ et sa partie $\{c, b\}$. Il faut bien distinguer $\{c, b\} \in P(E)$ de $\{c, b\} \subset E$.

2 Limites des suites

2.1 Limite d'une suite

2.1.1 Conjecturer la limite d'une suite

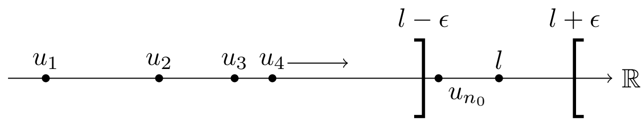
Étudier la limite d'une suite (u_n), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, c'est se poser la question "quand $n \to +\infty$, dans quelle direction se dirige u_n ?"

2.1.2 Synthèse à retenir

On dit qu'une suite (u_n) converge si sa limite quand $n \to +\infty$ est un nombre $l \in \mathbb{R}$. Sinon on dit qu'elle diverge vers $\pm\infty$ si sa limite quand $n \to +\infty$ est $\pm\infty$.

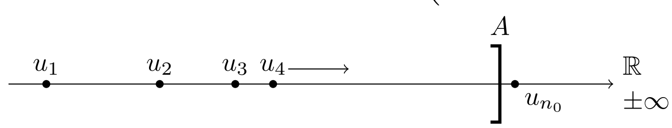
Définition concrète Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n$.

— Si la limite de (u_n) quand $n \to +\infty$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ $\left(\text{Si} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l\right)$:



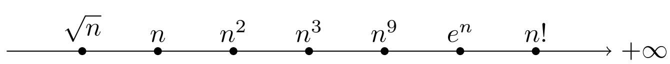
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, u_n \in]l-\epsilon; l+\epsilon[.$$

— Si la limite de (u_n) quand $n \to +\infty$ diverge vers $\pm\infty$ $\left(\text{Si} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty\right)$:



$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, u_n (> (+\infty) | < (-\infty)) A.$$

Echelle de croissance vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$



Trouver le premier terme d'une suite (u_n) à dépasser un seuil A d'une suite divergente (u_{n_0}) Pour trouver n_0, on peut, soit faire une table (Excel) ou un script Python ou calculer $u_n > A$.

2.2 Théorème des opérations autorisées sur les limites

Il est naturel d'affirmer que :

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = a + b \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = a \times b \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Or, il existe 4 situations posant problème où l'on ne peut pas affirmer ces formules, on les appelle les Formes Indéterminées (FI). Ces Formes Indéterminées sont : "$+\infty - \infty$", "$0 \times \pm\infty$", "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" et "$\frac{0}{0}$".

2.3 Comment lever une Forme Indéterminée

2.3.1 Cas d'une expression polynomiale

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^a - n^{a-1} + k$, On a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^a = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n^{a-1} + k = -\infty \end{cases}$ Par somme, on a une FI ("$+\infty - \infty$")

On peut donc, factoriser l'expression par son terme dominant en $+\infty$ (ici n^a).

$$\begin{aligned} u_n &= n^a - n^{a-1} + k \\ &= n^a \left(1 - \frac{n^{a-1}}{n^a} + \frac{k}{n^a}\right) \\ &= n^a \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{k}{n^a}\right) \end{aligned}$$

La FI est donc levée, on a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^a = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{k}{n^a} = 1 \end{cases}$ Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2.3.2 Cas d'une fraction rationnelle

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{k-n^a}{C+5n^a}$, On a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} k - n^a = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} C + 5n^a = -\infty \end{cases}$ Par somme, on a une FI ("$\frac{-\infty}{+\infty}$")

On peut donc, factoriser le numérateur et le dénominateur par leurs termes dominants respectifs en $+\infty$ (ici n^a).

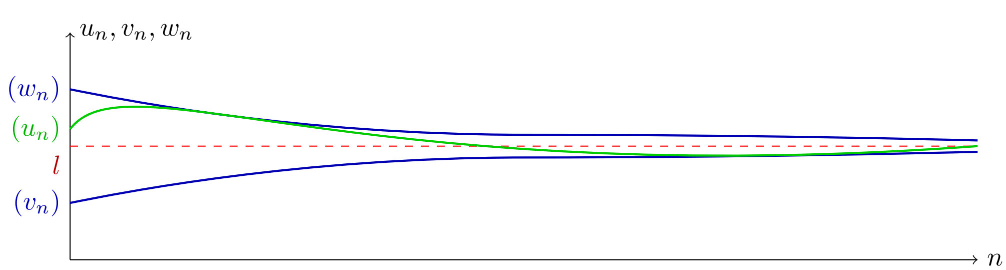
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{k - n^a}{C + 5n^a} \\ &= \frac{n^a}{n^a} \times \frac{\frac{k}{n^a} - 1}{\frac{C}{n^a} + 5} \\ &= \frac{\frac{k}{n^a} - 1}{\frac{C}{n^a} + 5} \end{aligned}$$

La FI est donc levée, on a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k}{n^a} - 1 = -1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{C}{n^a} + 5 = 5 \end{cases}$ Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{1}{5}$

2.4 Limites et Comparaison

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq u_n \leq w_n$

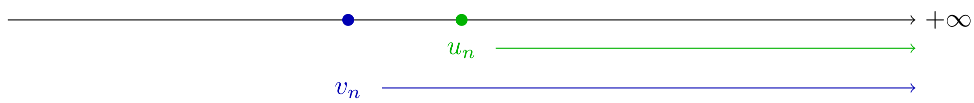
Théorème des gendarmes Si (v_n) et (w_n) convergent vers $l \in \mathbb{R}$ quand $n \to +\infty$, alors (u_n) converge également vers l quand $n \to +\infty$.



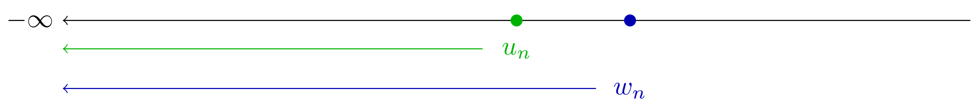
Théorème de comparaison Si (v_n) et (w_n) divergent vers $\pm\infty$ quand $n \to +\infty$, alors (u_n) diverge également vers $\pm\infty$ quand $n \to +\infty$.

Il y a 2 cas :

— Lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$:



— Lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$:



3 Probabilités, Loi Binomiale

3.1 Prérequis : qu'est-ce qu'un coefficient binomial

3.1.1 Factoriel d'un entier naturel

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factoriel de n le produit des entiers naturels de 1 à n et on le note $n!$.
On a par définition :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, n! = n(n-1)(n-2)...1 = n \times (n-1)! \end{cases}$$

3.1.2 Permutation de k objets

Lorsque l'on range k objets distincts, on appelle permutation de ces k objets l'arrangement de ces objets les uns par rapport aux autres.
On note $P(k) = k!$ le nombre de permutations de k objets distincts.

3.1.3 Arrangement de k objets parmi n

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid k \leq n$. On appelle arrangement de k objets parmi n le nombre de façons de choisir et de ranger k objets parmi n objets distincts avec ordre et sans remise.
On note A_n^k le nombre d'arrangements de k objets parmi n.
On a :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3.1.4 Combinaison de k objets parmi n

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid k \leq n$. On appelle combinaison de k objets parmi n le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets distincts sans ordre et sans remise.
On note C_n^k ou $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k objets parmi n.
On a :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3.2 Rappels

3.2.1 Variable aléatoire

Soit une expérience aléatoire, on appelle variable aléatoire X une fonction qui à chaque issue de l'expérience aléatoire associe un nombre réel.
On appelle Ω l'ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire.
On appelle $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
On a :

$$x \xrightarrow{X} y \in X(\Omega)$$

3.2.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit une variable aléatoire X définie sur une expérience aléatoire. On appelle loi de probabilité de X l'ensemble des couples (x_i, p_i) tels que $x_i \in X(\Omega)$ et $p_i = P(X = x_i)$.

$X = x_i$	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

3.2.3 Espérance d'une variable aléatoire

Soit une variable aléatoire X définie sur une expérience aléatoire. On appelle espérance de X la moyenne pondérée des valeurs prises par X.
On note $E(X)$ l'espérance de X.
Soit n le nombre de valeurs prises par X, on a :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i$$

3.2.4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Soit une variable aléatoire X définie sur une expérience aléatoire. On appelle variance de X la moyenne pondérée des carrés des écarts entre les valeurs prises par X et l'espérance de X.
On note $V(X)$ la variance de X.
Soit n le nombre de valeurs prises par X, on a :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - E(X))^2$$

L'écart-type de X est la racine carrée de la variance de X.
On note $\sigma(X)$ l'écart-type de X.
On a :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

3.2.5 Loi binomiale

3.2.6 Schéma de Bernoulli

Soit $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$.
On appelle schéma de Bernoulli une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois une expérience de Bernoulli, c'est-à-dire une expérience qui admet deux issues possibles : "succès" (S) avec probabilité p et "échec" $(\overline{S})$ avec probabilité $1 - p$.

3.2.7 Loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli de taille n et de paramètre p.
Voici un exemple d'issue possible : $(S, \overline{S}, S, S, \overline{S}, ..., S)$
D'ou l'univers de cette expérience est $\Omega = \{S, \overline{S}\}^n$
Soit X la variable aléatoire qui à chaque issue de l'expérience associe le nombre de succès obtenus.
On dit que X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p.
On note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

$\forall X \sim \mathcal{B}(n,p) \mid (n,p) \in \mathbb{N}^* \times [0,1], \quad \forall k \in \Omega(X) \mid \Omega(X) = [\![0,n]\!]$,
(Soit X la variable aléatoire qui à chaque issue de l'expérience associe le nombre de succès obtenus, et k le nombre de succès, on a :)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

L'espérance de cette loi binomiale est :

$$E(X) = n \times p$$

et son écart-type est :

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

4 Limite de fonctions

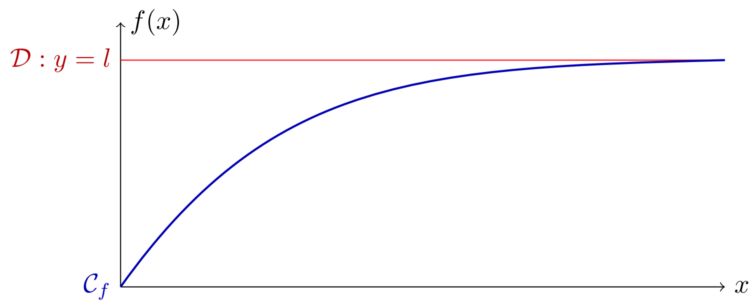
4.1 Limites de fonctions en $+\infty$ et asymptotes horizontales

4.1.1 Limite finie en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[A, +\infty[$. On dit que f admet une limite finie en $+\infty$ si :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

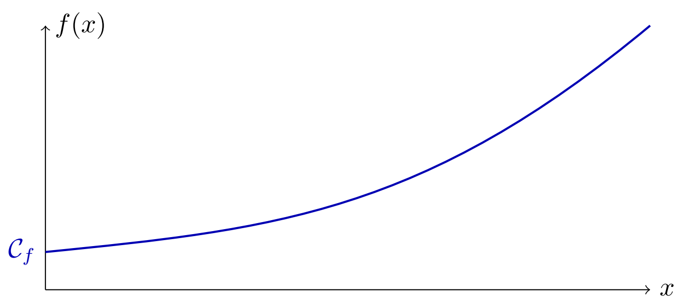
Dans ce cas, on dit que $\mathcal{D} : y = l$ est une asymptote horizontale de la courbe représentative de f.



4.1.2 Limite infinie en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[A, +\infty[$. On dit que f admet une limite infinie en $+\infty$ si :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$



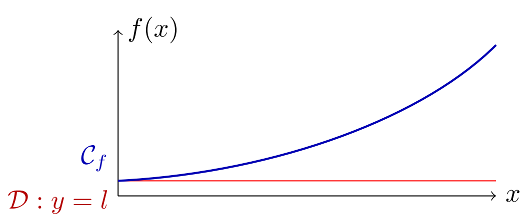
4.2 Limites en $-\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, A]$.

4.2.1 Limite finie en $-\infty$

f admet une limite finie en $-\infty$ si :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

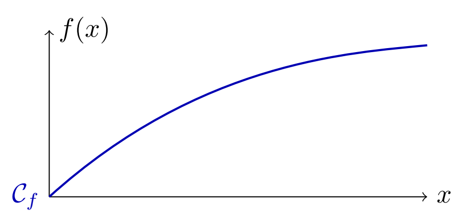


$\mathcal{D} : y = l$ est asymptote horizontale de f.

4.2.2 Limite infinie en $-\infty$

f admet une limite infinie en $-\infty$ si :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

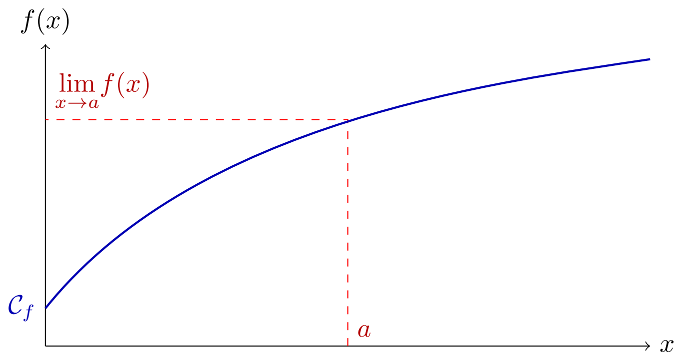


4.3 Limites finies en $a \in \mathbb{R}$ et asymptotes verticales

4.3.1 Limite finie en a

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a ou ayant a pour borne. On dit que f admet une limite finie en a si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

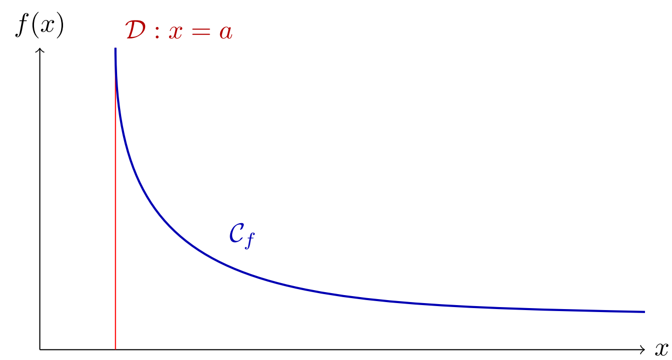


4.3.2 Limite infinie en a

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a ou ayant a pour borne. On dit que f admet une limite infinie en a si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Dans ce cas, on dit que $\mathcal{D} : x = a$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de f.



4.4 Détermination de limites de fonctions : les différentes techniques

Soit K désignant $\begin{cases} +\infty \text{ ou} \\ -\infty \text{ ou} \\ l \in \mathbb{R} \end{cases}$

4.4.1 Détermination de limites par opérations

Soit f et g deux fonctions telles que : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to K} f(x) = L_f \\ \lim\limits_{x \to K} g(x) = L_g \end{cases}$

On a : $\begin{cases} \text{Par somme : } \lim\limits_{x \to K} (f(x) + g(x)) = L_f + L_g \\ \text{Par produit : } \lim\limits_{x \to K} (f(x) \times g(x)) = L_f \times L_g \\ \text{Par quotient : } \lim\limits_{x \to K} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{L_f}{L_g} \quad \text{si } L_g \neq 0 \end{cases}$

Remarque : Formes Indéterminées (FI) Il existe 4 situations posant problème où l'on ne peut pas affirmer ces formules, on les appelle les Formes Indéterminées (FI). Ces Formes Indéterminées sont : "$+\infty - \infty$", "$0 \times \pm\infty$", "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" et "$\frac{0}{0}$".

4.4.2 Détermination de limites par factorisation du terme prépondérant

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On peut lever une FI en factorisant l'expression de f par son terme prépondérant en K.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3-2x^2+5}{x^3+1}$.
On as une FI de type "$\frac{\pm\infty-\infty}{+\infty}$" ("$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$") lorsque $x \to +\infty$.

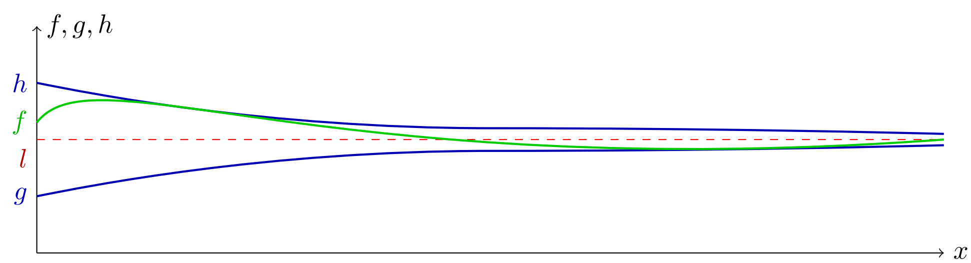
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{x^3 + 1} \\ &= \frac{x^3}{x^3} \times \frac{1 - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} \\ &= \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} \end{aligned}$$

La FI est levée, on a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^3} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x^3} = 1 \end{cases}$ Par quotient, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

4.4.3 Détermination de limites par comparaison ou encadrement

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I. On suppose que $\forall x \in I,\ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

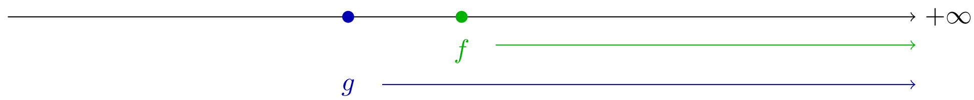
Théorème des gendarmes Si g et h tendent vers $l \in \mathbb{R}$ quand $x \to K$, alors f tend également vers l quand $x \to K$.



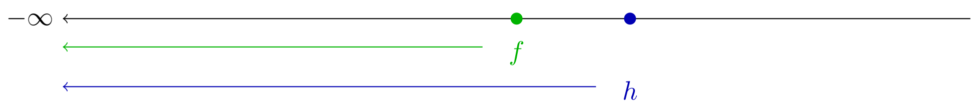
Théorème de comparaison Si g et h tendent vers $\pm\infty$ quand $x \to K$, alors f tend également vers $\pm\infty$ quand $x \to K$.

Il y a 2 cas :

— Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$:



— Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$:



4.4.4 Détermination de limites par composition

Soit f et g deux fonctions.
On appelle la fonction composée de f et g, la fonction notée $f \circ g$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x \to K} g(x) = L_g \\ \lim\limits_{U \to L_g} f(U) = L_f \end{cases} \quad \text{alors } \lim\limits_{x \to K} f \circ g(x) = L_f$$

4.4.5 Détermination de limites par croissances comparées

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x)}{x^n} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^n \cdot ln(x) = 0 \end{cases}$$

5 Géométrie dans l'espace

5.1 Vecteurs dans l'espace (1er ep)

5.1.1 Vecteur

Un vecteur $\vec{AB}$, non nul, de l'espace est un "objet" mathématique caractérisé par :

$$\begin{cases} \text{une direction : celle de la droite } (AB) \\ \text{un sens : de } A \text{ vers } B \\ \text{une norme (ou longueur) : } ||\vec{AB}|| = AB \end{cases}$$

Le vecteur nul de l'espace est noté $\vec{0}$ et $\begin{cases} \text{n'a pas de direction} \\ \text{n'a pas de sens} \\ \text{a pour norme } ||\vec{0}|| = 0 \end{cases}$

5.1.2 Opérations sur les vecteurs - Colinéarité de deux vecteurs

Relation de Chasles Soit A, B et C trois points de l'espace. On a :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

La règle du parallélogramme Soit $ABCD$ un parallélogramme de l'espace. On a :

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$

Colinéarité de deux vecteurs Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction, c'est à dire :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid \vec{u} = t\vec{v}$$

Remarque : si $t > 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, sinon ils ont des sens opposés.

Famille de vecteurs

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors on dit que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est liée.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires alors on dit que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre.

5.1.3 Combinaison linéaire de vecteurs

Un vecteur $\vec{u}$ de l'espace est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est définit par :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3,\ \vec{u} \text{ est une combinaison linéaire de } \vec{v} \text{ et } \vec{w} \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$$

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ liée $\Leftrightarrow$ Au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.
- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ libre $\Leftrightarrow$ Aucun des vecteurs n'est combinaison linéaire des

5.2 Droites dans l'espace

5.2.1 Vecteur directeur d'une droite

On dit que un vecteur $\vec{u}$, non nul, est un vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ si sa direction est la même que celle de la droite $\mathcal{D}$.

5.2.2 Caractérisation d'une droite dans l'espace

Il existe deux façons de caractériser une droite $\mathcal{D}$ dans l'espace :

- Par un point A appartenant à la droite $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \vec{u}) = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{AM} = t\vec{u},\ t \in \mathbb{R}\}$$

- Par deux points A et B distincts appartenant à la droite $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, B) = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{AB} \text{ est un vecteur directeur de } \mathcal{D}\}$$

5.2.3 Position relative de deux droites dans l'espace

Deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de l'espace peuvent être dans une des quatres positions suivantes :

— $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes si elles ont un point commun I.

$$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = I$$

— $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont strictement parallèles si elles n'ont pas de point commun.

$$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$$

— $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues si elles ont tous leurs points en commun.

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2, \quad \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$$

— $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont non coplanaires si elles n'ont pas de point commun et ne sont pas parallèles.

$$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$$

5.3 Plan de l'espace

5.3.1 Vecteurs coplanaires

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de l'espace. On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de l'espace tels que :

$$\begin{cases} \vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \\ \vec{v} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b} \\ \vec{w} = \epsilon\vec{a} + \zeta\vec{b} \end{cases} \quad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta) \in \mathbb{R}^6 \text{ et } \vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ non colinéaires.}$$

— A, B, C et D coplanaires $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires.
— (AB) et (CD) coplanaires $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires.
— $\mathcal{D}//\mathcal{P} \Leftrightarrow$ Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est coplanaires avec deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

5.3.2 Caractérisation d'un plan dans l'espace

Un plan $\mathcal{P}$ dans l'espace peut être caractérisé de deux manières :

— Par un point A appartenant au plan $\mathcal{P}$ et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

— Par trois points A, B et C distincts appartenant au plan $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, B, C) = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{AB}, \vec{AC} \text{ et } \vec{AM} \text{ sont coplanaires}\}$$

5.3.3 Position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace

Une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$ dans l'espace peuvent être dans une des trois positions suivantes :

— $\mathcal{D}$ est sécante à $\mathcal{P}$ si elle a un point d'intersection avec le plan.

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = I$$

— $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ si elle n'a pas de point d'intersection avec le plan.

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$$

— $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$ si tous les points de la droite appartiennent au plan.

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$$

Remarque : $\mathcal{D}//\mathcal{P} \Leftrightarrow [\mathcal{D} \subset \mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset]$

5.3.4 Position relative de deux plans dans l'espace

Deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ dans l'espace peuvent être dans une des trois positions suivantes :
— $\mathcal{P}_1$ est sécante à $\mathcal{P}_2$ si elles ont une droite d'intersection.

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{D}$$

— $\mathcal{P}_1$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}_2$ si elles n'ont pas de point d'intersection.

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$$

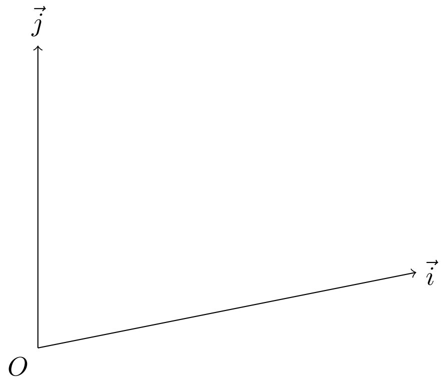
— $\mathcal{P}_1$ est confondue avec $\mathcal{P}_2$ si elles ont tous leurs points en commun.

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$$

5.4 Bases et repères dans l'espace

5.4.1 Base et repère du plan

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.



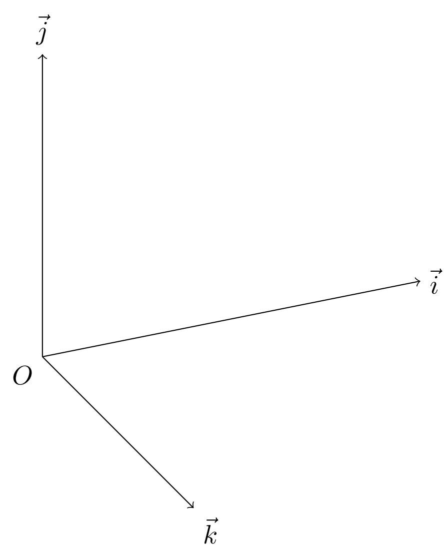
On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ constitue une base des vecteurs du plan c'est à dire que :

$$\forall \vec{u} \in \mathcal{P},\ \exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$$

On peut alors écrire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$$

5.4.2 Base et repère de l'espace



Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

On dit que $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ constitue une base des vecteurs de l'espace c'est à dire que :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ \exists!(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$$

On peut alors écrire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

On appelle repère de l'espace tout quadruplet $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ où O est un point de l'espace et $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base des vecteurs de l'espace.

5.4.3 Calculs sur les coordonnées

Dans un repère de l'espace $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

— $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

— $M = (x,y,z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

— $\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

— I milieu de $[AB] \Leftrightarrow I = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

5.5 Extension du produit scalaire dans l'espace (2e ep)

5.5.1 Quatre visions équivalentes du Produit Scalaire

Vision 1 : R.O.N. Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un R.O.N. de l'espace.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

On définit le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet espace par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Vision 2 : Angle Soit θ l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\theta = |(\vec{u},\vec{v})|$.

On définit le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet espace par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\theta)$$

Vision 3 : Projection orthogonale Soit, $\vec{u}'$ la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

On définit le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet espace par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\{ \begin{array}{ll} |\vec{u}'||\vec{v}| & \text{si } \vec{u} \text{ même sens que } \vec{v} \\ -|\vec{u}'||\vec{v}| & \text{sinon} \end{array} \right\}$$

Vision 4 : Polarisation Soit ABC un triangle de l'espace.

On définit le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet espace par :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right)$$

5.5.2 Théorème d'AL-KASHI

Soit ABC un triangle de l'espace.

On a,

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \cos(|(\vec{AB},\vec{BC})|)$$

5.6 Orthogonalité dans l'espace

5.6.1 Droites orthogonales

Deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires lorsqu'elles sont coplanaires et perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.

Deux droites de l'espace sont dites orthogonales lorsque l'on peut trouver un point A, tel que les parallèles à ces deux droites passant par A soient perpendiculaires.

Ainsi, $[\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$ coplanaire à $\mathcal{D}'] \Leftrightarrow \mathcal{D}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}'$.

On a, $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.

5.6.2 Droite orthogonale à un plan

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On dit que $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$ si elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{D} \perp \mathcal{P} \Leftrightarrow \forall \Delta \subset \mathcal{P},\, \mathcal{D} \perp \Delta$$

$$\mathcal{D} \perp \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists(\Delta, \Delta') \subset \mathcal{P}^2 \mid \Delta \text{ sécante à } \Delta', \quad \mathcal{D} \perp \Delta \text{ et } \mathcal{D} \perp \Delta'$$

5.7 Projection orthogonale d'un point sur une droite, un plan de l'espace

5.7.1 Projection orthogonale d'un point sur une droite

$$\forall (\mathcal{D}, A) \in {\mathbb{R}^3}^2,\, \exists! P \in \mathbb{R}^3 \mid [A \in \mathcal{P},\, \mathcal{P} \perp \mathcal{D}]$$

Soit H le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec le plan $\mathcal{P}$, alors on dit que H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

5.7.2 Projection orthogonale d'un point sur un plan

$$\forall (\mathcal{P}, A) \in {\mathbb{R}^3}^2,\, \exists! \mathcal{D} \in \mathbb{R}^3 \mid [A \in \mathcal{D},\, \mathcal{P} \perp \mathcal{D}]$$

Soit H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec la droite $\mathcal{D}$, alors on dit que H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

5.8 Représentations Paramétriques d'une DROITE de l'Espace (3e ep)

5.8.1 Abscisse d'un point sur une droite munie d'un repère

$$\forall (A, \vec{u}) \in {\mathbb{R}^3}^2 \mid \mathcal{D}(A, \vec{u}),\, \forall M \in \mathcal{D},\, \exists! t \in \mathbb{R} \mid \vec{AM} = t\vec{u}$$

5.8.2 Représentations Paramétriques d'une droite de l'Espace

$$\forall M(x, y, z) \in \mathbb{R},\, M \in \mathcal{D}(A(x_A, y_A, z_A),\, \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

5.9 Equations cartésiennes d'un plan de l'espace

Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ est normal a un plan $\mathcal{P} \Leftrightarrow \exists (\vec{u}, \vec{v}) \in {\mathbb{R}^3}^2 \mid [\vec{n} \perp \vec{v},\, \vec{n} \perp \vec{u}]$

$$\forall (\vec{n}, A) \in {\mathbb{R}^3}^2,\, \exists! \mathcal{P} \in \mathbb{R}^3 \mid [A \in \mathcal{P},\, \vec{n} \perp \mathcal{P}] \quad \{ \text{ Ce plan } \mathcal{P} \text{ est noté } \mathcal{P}(A, \vec{n})$$

$$\forall \mathcal{P}(A(x_A, y_A, z_A), \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}^3, \exists \vec{OM}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \mid \mathcal{P} : ax + by + cz + \vec{OM} \cdot \vec{n} = 0$$

6 Dérivation et Convexité

6.1 Dérivation de fonctions

6.1.1 Lien entre nombre dérivé et tangente

On dit qu'une fonction f est dérivable en un point $x = a$, si $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, on note $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ et on dit que $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a.

En cas d'existence de $f'(a)$, on peut interpréter ce nombre comme la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a. L'équation réduite de cette tangente est alors : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

6.2 Fonctions dérivées et variations de fonctions

$$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow f \text{ est croissante en } x \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow f \text{ est décroissante en } x \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f \text{ est constante en } x \end{cases}$$

$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f admet un extremum local en $x = a$ $\Leftrightarrow f'$ s'annule en $x = a$ en changeant de signe

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	

$f(a)$ est un maximum local.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	

$f(a)$ est un minimum local.

6.3 Dérivées des fonctions usuelles et opérations

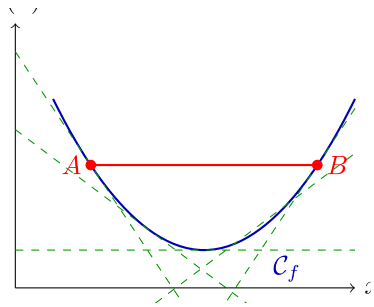
Fonction $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$
$f(x) = p, \quad p \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = mx + p, \quad (m,p) \in \mathbb{R}^2$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x), \quad x \in \mathbb{R}^+$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$

— $(u+v)' = u' + v'$
— $(ku)' = ku'$
— $(uv)' = u'v + uv'$
— $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
— $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
— $\big(v(u)\big)' = \big(v \circ u\big)' = u' \cdot v' \circ u$

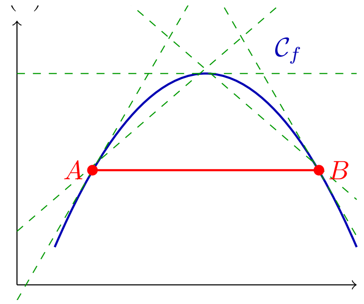
6.4 Fonction convexe

6.4.1 Fonction convexe et concave

$$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \begin{cases} f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow \forall (A,B) \in \mathcal{C}_f^2,\ [AB] \text{ est au dessus de } \mathcal{C}_f \\ \qquad\qquad\qquad\quad\ \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{C}_f,\ \mathcal{T}_A \text{ est en dessous de } \mathcal{C}_f \\ f \text{ est concave sur } I \Leftrightarrow \forall (A,B) \in \mathcal{C}_f^2,\ [AB] \text{ est en dessous de } \mathcal{C}_f \\ \qquad\qquad\qquad\quad\ \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{C}_f,\ \mathcal{T}_A \text{ est au dessus de } \mathcal{C}_f \end{cases}$$



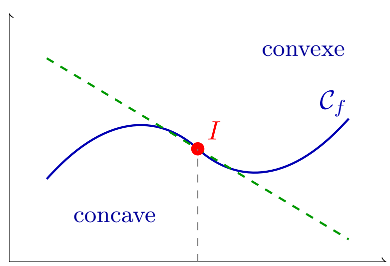
f **convexe** : $[AB]$ au-dessus de $\mathcal{C}_f$, tangentes en-dessous



f **concave** : $[AB]$ en-dessous de $\mathcal{C}_f$, tangentes au-dessus

6.4.2 Points d'inflexion

$$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ admet un point d'inflexion en } x = a \Leftrightarrow f'' \text{ s'annule en } x = a \text{ en changeant de signe}$$



6.5 Lien entre convexité et dérivation

$$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \begin{cases} f \text{ est convexe sur } I \Leftrightarrow f' \text{ est croissante sur } I \Leftrightarrow f'' > 0 \text{ sur } I \\ f \text{ est concave sur } I \Leftrightarrow f' \text{ est décroissante sur } I \Leftrightarrow f'' < 0 \text{ sur } I \\ \mathcal{C}_f \text{ admet un point d'inflexion en } A(a, f(a)) \Leftrightarrow f'' \text{ s'annule en } x = a \text{ en changeant de signe} \end{cases}$$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave	0	convexe	

$A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

7 Comportement des suites

7.1 Suites majorées, minorées, bornées

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \begin{cases} \text{est majorée} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R},\ u_n \leq M \\ \text{est minorée} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R},\ u_n \geq m \\ \text{est bornée} \Leftrightarrow \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ m \leq u_n \leq M \end{cases}$$

7.2 Sens de variation d'une suite

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n) \begin{cases} \text{est croissante} \Leftrightarrow u_n \leq u_{n+1} \\ \text{est décroissante} \Leftrightarrow u_n \geq u_{n+1} \end{cases}$$

Dans les deux cas, on dit que la suite est monotone.

7.3 Limite des suites géométriques (q^n)

$$\forall q \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } q < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q = -1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

7.4 Convergence des suites monotones

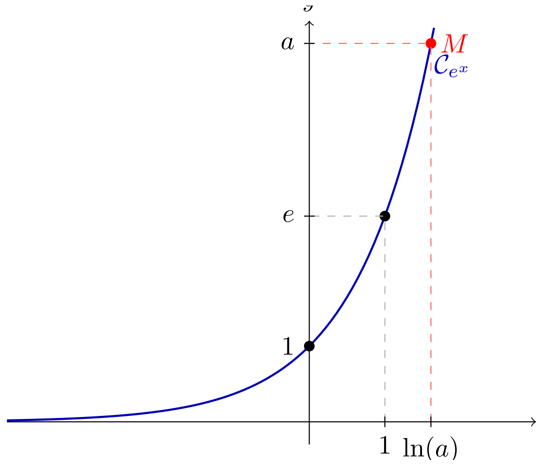
7.4.1 Théorème de convergence des suites monotones

— Toute suite croissante et majorée, converge.
— Toute suite décroissante et minorée, converge.
D'où, toute suite monotone et bornée, converge.

8 Fonction logarithme népérien

8.1 Définition et propriétés

8.1.1 Définition



$$\forall a \in \mathbb{R}^{*+},\ \exists! b \in \mathbb{R} \mid a = e^b$$

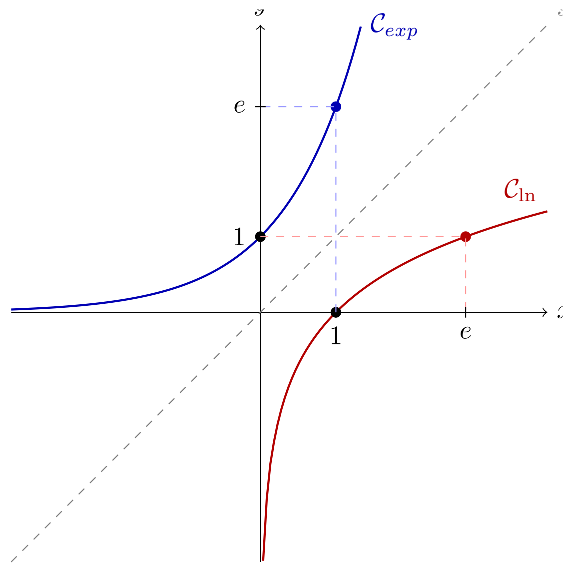
Ce nombre réel b est appelé logarithme népérien de a et est noté $\ln(a)$.
Ainsi, $\ln(a)$ est l'unique antécédent de a par la fonction exponentielle.
D'où, $e^{\ln(a)} = a$.

8.1.2 Propriétés

— $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$
— $\forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ e^{\ln(x)} = x$
— $e^0 = 1 \Leftrightarrow \ln(1) = 0$
— $e^1 = e \Leftrightarrow \ln(e) = 1$
— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{*+},\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
— $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{*+},\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
— $\forall (x,n) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{N},\ \ln(x^n) = n\ln(x)$
— $\forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
— $\forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$
— $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{*+},\ \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
— $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{*+},\ \ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$

8.2 Étude de la fonction logarithme népérien

— $\mathcal{D}_{\ln} =]0, +\infty[= \mathbb{R}^{*+}$
— $\forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$ $\Big\{$Or, $\forall x \in \mathbb{R}^{*+},\ \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow$ ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$
— $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \end{cases}$


$\mathcal{C}_{exp}$
$\mathcal{C}_{\ln}$
e
1
1
e

9 Continuité d'une fonction

9.1 Continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a. La fonction f est continue en a si :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

La fonction f est continue sur l'intervalle I, si elle est continue en tout point de I

- Toutes les fonctions de références (polynômes, racine carrée, exponentielle, logarithme, valeur absolue, trigonométriques) sont continues sur leur ensemble de définition.
- La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues donne une fonction continue sur son ensemble de définition.

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est continue sur I.

9.2 Le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

9.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b $(a < b)$ appartenant à I. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c tel que $f(c) = k$. Ou pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution entre a et b.

9.2.2 Corollaire du TVI

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et soient a et b $(a < b)$ appartenant à I. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c tel que $f(c) = k$. Ou pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution entre a et b.

10 Primitives de fonctions

10.1 Primitive : Existence et Infinité

Toute fonction continue sur un intervalle I ADMET une INFINITÉ de primitives sur cet intervalle I.

G et F sont deux primitives de f sur $I \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, |\ \forall x \in I,\ G(x) = F(x) + C$

10.2 Primitives des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	**Primitive** $F(x)$ $(C \in \mathbb{R})$
$f(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + C$
$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$
$f(x) = e^a x, \quad a \in \mathbb{R}^*$	$F(x) = \frac{1}{a}e^a x + C$
$f(x) = \ln(x), \quad x \in \mathbb{R}^+$	$F(x) = \ln(x) + C$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + C$

— $f = u'u^n \Leftrightarrow F = \frac{1}{n+1}u^{n+1}$

— $f = \frac{u'}{\sqrt{u}} \Leftrightarrow F = 2\sqrt{u}$

— $f = \frac{u'}{u} \Leftrightarrow F = \ln(|u|)$

— $f = u'e^u \Leftrightarrow F = e^u$

— $f = u'\cos(u) \Leftrightarrow F = -\sin(u)$

— $f = u'v' \circ u \Leftrightarrow F = v \circ u$

11 Equations différentielles

11.1 Equation Différentielle du type $y' = ay$

$$\forall a \in \mathbb{R},\ y' = ay \Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R},\ y = Ce^{ax}$$

11.2 Equation Différentielle du type $y' = ay + b$

$$\forall a \in \mathbb{R},\ y' = ay + b \Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R},\ y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

11.3 Equation Différentielle du type $y' = ay + f(x)$

$$\forall a \in \mathbb{R},\ y' = ay + f(x) \Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R},\ y = Ce^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax} f(x)\, dx$$

12 Trigonométrie