Spécialité Science de l'Ingénieur terminale

Table des matières

1 Modélisation des actions mécaniques

La mécanique est la science des lois de l'équilibre et du mouvement des solides. L'équilibre ou le mouvement d'un solide dépend des actions mécaniques qui lui sont appliquées.

On appelle action mécanique, toute cause capable, par contact ou à distance, de créer un mouvement, de maintenir un corps en équilibre ou de déformer un corps.

1.1 Résultante d'une force

On appelle résultante la force unique qui a le même effet qu'un système de forces. C'est à dire la somme vectorielle de toutes les forces appliquées à un corps.

Il y a 2 types d'action mécanique : par contact ou à distance. Chacune d'elles sera modélisée par une résultante aux propriétés distinctes.

1.1.1 Résultante d'actions mécaniques de contact

Contact entre deux solides On considère le point A, point de contact entre deux solides $S1$ et $S2$.

La résultante de l'action mécanique du solide $S1$ sur le solide $S2$ au point A est notée $\vec{R}_{S1\to S2}$.

$$\vec{R}_{S1\to S2} \quad \begin{cases} \text{direction : } \perp \text{ au contact} \\ \text{sens : de } S1 \text{ vers } S2 \\ \text{norme : } ||\vec{R}_{S1\to S2}|| \\ \text{point d'application : } A \end{cases}$$

Contact entre un solide et un fluide La résultante de l'action mécanique du fluide F sur le solide $S1$ est notée $\vec{R}_{F\to S1}$.

$$\vec{R}_{F\to S1} \quad \begin{cases} \text{direction : } \perp \text{ au contact} \\ \text{sens : de } F \text{ vers } S1 \\ \text{norme : } ||\vec{R}_{F\to S1}|| = p\cdot S \\ \text{point d'application : centre de gravité de } S1 \end{cases}$$

On a la relation suivante permettant de calculer l'effort de pression d'un fluide sur un solide :

$$F = p\cdot S \quad \begin{cases} F \text{ : effort de pression en N} \\ p \text{ : pression en Pa} \\ S \text{ : surface en m}^2 \end{cases}$$

Cas particulier : ressort La résultante de l'action mécanique du ressort Re sur le solide $S1$ est notée $\vec{R}_{Re\to S1}$.

$$\vec{R}_{Re\to S1} \quad \begin{cases} \text{direction : } \perp \text{ au contact} \\ \text{sens : de } Re \text{ vers } S1 \\ \text{norme : } ||\vec{R}_{Re\to S1}|| = k\cdot x \\ \text{point d'application : centre de gravité de } S1 \end{cases}$$

On a la relation suivante permettant de calculer l'effort de pression du ressort :

$$F = k\cdot x \quad \begin{cases} F \text{ : effort du ressort en N} \\ k \text{ : constante de raideur en N.m}^{-1} \\ x \text{ : déformation en m} \end{cases}$$

Pour trouver la déformation x, on utilise la relation :

$$x = l_0 - l \quad \begin{cases} l_0 \text{ : longueur à vide du ressort en m} \\ l \text{ : longueur minimale du ressort en m} \end{cases}$$

1.1.2 Résultante d'actions mécaniques a distance

Attraction terrestre, pesenteur, poids La résultante de l'action mécanique de la Terre sur un corps est notée $\vec{P}$.

$$\vec{P} \quad \begin{cases} \text{direction : } | \\ \text{sens : } \downarrow \\ \text{norme : } ||\vec{P}|| = m \cdot g \\ \text{point d'application : centre de gravité de } S1 \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{P}$ sera toujours représenté comme suit :

$$\vec{P} \quad \begin{cases} 0 \\ -P = -m \cdot g \\ 0 \end{cases}$$

1.2 Moment d'une force

On appelle moment d'une force son effet de rotation sur un objet. Le moment d'une force est indissociable de la force qui le provoque et est toujours definit en un point.
Le moment de la force $\vec{F}$ au point O est noté $\vec{M}_O(\vec{F})$.
Sachant que la force $\vec{F}$ est appliquée en un point A de l'objet, on définit le vecteur $\vec{OA}$ comme le vecteur allant de O à A.

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

Le moment scalaire est la plus simple expression du moment :

$$||\vec{M}_O(\vec{F})|| = ||\vec{F}|| \cdot d \quad \begin{cases} ||\vec{F}|| : \text{force en N} \\ d : \text{bras de levier en m} \\ ||\vec{F}|| \perp d \end{cases}$$

1.2.1 Transport du moment

Soit le moment de la force $\vec{F}$ au point O, $\vec{M}_O(\vec{F})$. Pour trouver ce moment au point A :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{AO} \wedge \vec{F}$$

1.3 Torseur d'action mecanique

Toute action mecanique est entierrement caractérisée, d'un point de vue mecanique, par un torseur.
Un torseur est un ensemble ordonné de deux champs vectoriels tels que :
— le 1^{er} champ, appele resultante du torseur et noté $\vec{R}$, est un champ constant
— le 2^{eme} champ est le champ des moments, noté $\vec{M}$, est un champ variable en fonction du point

$$\{T_{1\to2}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{1\to2} \\ \vec{M}_A(\vec{F}_{1\to2}) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_{1\to2} & L_{A1\to2} \\ Y_{1\to2} & M_{A1\to2} \\ Z_{1\to2} & N_{A1\to2} \end{Bmatrix}_A$$

1.3.1 Addition de torseurs

L'addition de torseurs est possible seulement si les torseurs sont appliqués au même point. On peux la calculer en additionnant les composantes correspondantes des torseurs :

$$\begin{Bmatrix} X_1 & L_{O1} \\ Y_1 & M_{O1} \\ Z_1 & N_{O1} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} X_2 & L_{O2} \\ Y_2 & M_{O2} \\ Z_2 & N_{O2} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} X_1 + X_2 & L_{O1} + L_{O2} \\ Y_1 + Y_2 & M_{O1} + M_{O2} \\ Z_1 + Z_2 & N_{O1} + N_{O2} \end{Bmatrix}_O$$

2 Principe fondamental de la statique (P.F.S)

Le principe fondamental de la statique (P.F.S) est un cas particulier du principe fondamental de la dynamique.

Il énonce qu'il existe une classe de référentiels dit "galiléens" dans lesquels un système de solides S reste en équilibre si la somme des actions mécaniques sur ce système est nulle.

$$\{T_{\bar{S}\to S}\} = \{0\}$$

Un systeme de solides est en équilibre si et seulement si chaque solide le constituant est en equilibre. Le principe fondamental de la statique donne deux relations vectorielles :

$$\sum \vec{F}_{\bar{S}\to S} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_{A,\,\bar{S}\to S} = \vec{0}$$

Le principe fondamental de la statique donne donc 6 equations scalaires en projetant ces deux equations vectorielles.

2.1 Théorème des actions réciproques

Soit un système S en équilibre composé de deux sous-systèmes S_1 et S_2.

$$\begin{aligned}
\text{On isole } S : \{T_{\bar{S}\to S}\} &= \{T_{\bar{S}\to S_1}\} + \{T_{\bar{S}\to S_2}\} = \{0\} \quad (1)\\
\text{On isole } S_1 : \{T_{\bar{S_1}\to S_1}\} &= \{T_{\bar{S}\to S_1}\} + \{T_{S_2\to S_1}\} = \{0\} \quad (2)\\
\text{On isole } S_2 : \{T_{\bar{S_2}\to S_2}\} &= \{T_{\bar{S}\to S_2}\} + \{T_{S_1\to S_2}\} = \{0\} \quad (3)\\
(1) - [(2) + (3)] &= \{T_{S_1\to S_2}\} + \{T_{S_2\to S_1}\} = \{0\}
\end{aligned}$$

Si S_1 exerce une action mécanique sur S_2, alors S_2 exerce une action mécanique de même direction, de même intensité mais opposée.

2.2 Cas particuliers

2.2.1 Simplification plane

Si la géométrie est plane, alors les actions mécaniques peuvent être représentées dans un plan. Les resultantes des A.M. dont dans le plan et les moments sont perpendiculaires au plan.

$$\{T_{\bar{S}\to S}\}_A = \left\{\begin{matrix} X_{\bar{S}\to S} & 0 \\ Y_{\bar{S}\to S} & 0 \\ 0 & N_{A,\,\bar{S}\to S} \end{matrix}\right\}_A$$

2.2.2 Solide soumis a deux glisseurs

Soit un solide S soumis à deux glisseurs $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ respectivement au points A et B en equilibre.
En appliquant le théorème de la resultante statique :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

$\Rightarrow \vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ sont de meme direction, de meme intensité mais opposée.

En appliquant le théorème du moment statique au point B :

$$\vec{M}_B(\vec{F}_A) + \vec{M}_B(\vec{F}_B) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{M}_B(\vec{F}_A) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{M}_A(\vec{F}_A) + \vec{BA} \wedge \vec{F}_A = \vec{0}$$

Or $\vec{BA} \neq \vec{0}$ et $\vec{F}_A \neq \vec{0}$ donc $\vec{BA}$ et $\vec{F}_A$ sont colinéaires.

Donc, si un solide est soumis à deux glisseurs en équilibre, alors ces glisseurs sont de même direction, de même intensité mais opposée.

2.2.3 Solide soumis a trois glisseurs non parallèles

Soit un solide S soumis à trois glisseurs $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_C$ respectivement au points A, B et C en equilibre.

En appliquant le théorème de la resultante statique :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ La somme vectorielle des forces est un triangle.

En appliquant le théorème du moment statique au point I, intersection des directions de $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$:

$$\vec{M}_I(\vec{F}_A) + \vec{M}_I(\vec{F}_B) + \vec{M}_I(\vec{F}_C) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{M}_I(\vec{F}_C) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{M}_C(\vec{F}_C) + \vec{IC} \wedge \vec{F}_C = \vec{0} \Rightarrow \vec{IC} \wedge \vec{F}_C = \vec{0}$$

Or $\vec{IC} \neq \vec{0}$ et $\vec{F}_C \neq \vec{0}$ donc $\vec{IC}$ et $\vec{F}_C$ sont colinéaires.

Donc, si un solide est soumis à trois glisseurs non parallèles en équilibre, alors ces glisseurs sont concourants, coplanaires et leur somme vectorielle est nulle.

2.2.4 Solide soumis a trois glisseurs parallèles

Soit un solide S soumis à trois glisseurs $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_C$ respectivement au points A, B et C en equilibre.

En appliquant le théorème de la resultante statique :

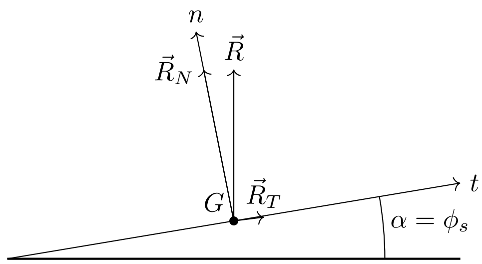
$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_C = -(\vec{F}_A + \vec{F}_B)$$

$\Rightarrow$ La troisieme force est portee par la meme direction.

Donc, si un solide est soumis à trois glisseurs parallèles en équilibre, alors ces glisseurs sont parallèles et leur somme vectorielle est nulle.

3 Frottements, adhérence et Loi de Coulomb

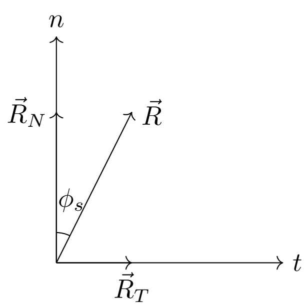
L'adhérence, c'est a dire le non-glissement, est caractérisée par le coéfficient d'adhérence (ou frottement statique) noté f_s, déterminé expérimentalement et défini tel que :



$$f_s = \tan\phi_s \qquad \begin{cases} f_s \text{ : coéfficient d'adhérence} \\ \phi_s \text{ : angle d'adhérence en rad} \end{cases}$$

Lorsque un solide est a la limite du glissement, l'angle ϕ_s est appelé angle limite d'adhérence. Toute pente d'angle $\alpha < \phi_s$ est statique, tandis que toute pente d'angle $\alpha > \phi_s$ glisse.

3.1 Loi de Coulomb



$$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T = \begin{cases} R_T = R\sin\phi_s \\ R_N = R\cos\phi_s \end{cases}$$

$$R_T = R\sin\phi_s = R_N\frac{\sin\phi_s}{\cos\phi_s} = R_N\tan\phi_s$$

$$R_T = R_N \cdot f_s$$